Exercice du Bac 2016

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3-(4+8i)z^2+(-14+24i)z+32+4i$

1.a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$

b) En déduire l'ensemble des solution de l'équation $P(z)=0$.
On note z_1, z_2 et z_3 ses solutions avec $|z_1|<|z_2|<|z_3|$.

c) Soit A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
Déterminer l'affixe du point G barycentre du système $\{(O,5);(A,-7);(C,4)\}$. Placer A, B, C et G sur la figure.

2) Pour tout nombre complexe z on pose : $\varphi(z) = z^2-(4+6i)z-2+16i$
On note Γ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\varphi(z)$ soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant $z = x+iy$, donner une équation cartésienne de Γ et montrer que Γ est une conique de centre G.

b) Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

Solution

1)
a) $P(2i) = (2i)^3-(4+8i)(2i)^2+(-14+24i)(2i)+32+4i$

$= -8i+16+32i-28i-48+32+4i$

$=0$

$P(2i)=0 \Rightarrow P$ est factorisable par $(z-2i)$.

T.H:

	1	$-4-8i$	$-14+24i$	$32+4i$
$2i$	$\times$	$2i$	$-8i+12$	$-4i-32$
	1	$-4-6i$	$-2+16i$	0

$\Leftrightarrow P(z) = (z-2i)(z^2-(4+6i)z-2+16i) \Rightarrow a=-4-6i,\ b=-2+16i$

$P(z)=0 \Rightarrow (z-2i)\left(z^2-(4+6i)z-2+16i\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} z-2i=0 \\ \text{ou} \\ z^2-(4+6i)z-2+16i=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z=2i \\ \text{ou} \\ z^2-(4+6i)z-2+16i=0 \end{cases}$

$\Delta=(4+6i)^2-4(-2+16i)$

$\Delta=16+48i-36+8-64i$

$\Delta=-12-16i$

$\Delta=(2-4i)^2$

$z=\frac{4+6i+2-4i}{2}=3+i$, et $z=\frac{4+6i-2+4i}{2}=1+5i$

on a :

$|2i|=2$, $|3+i|=\sqrt{10}$, et $|1+5i|=\sqrt{26}$

$|2i|<|3+i|<|1+5i| \Rightarrow z_1=2i,\ z_2=3+i$, et $z_3=1+5i$.

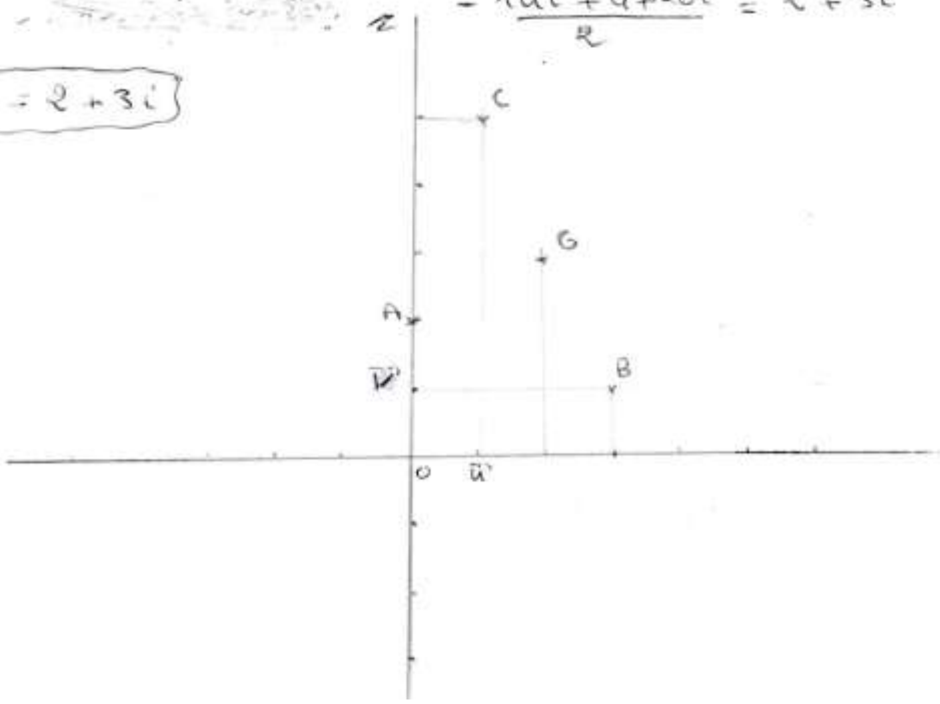
$S\{(2i,\ 3+i,\ 1+5i)\}$.

c) $G=\text{bar}\ \begin{array}{c|c|c} A & B & C \\ \hline 5 & -7 & 4 \end{array}$

$z_G=\frac{5z_a-7z_2+4z_3}{2}=\frac{5\times a-7(2i)+4(1+5i)}{2}$

$=\frac{-14i+4+20i}{2}=2+3i$

$\Leftrightarrow \boxed{z_G=2+3i}$



D) $\mathcal{A}_{(OABC)} = \frac{(B+b)\times h}{2}$

$= \frac{(CB+OA)\times OC}{2}$

$CB = |z_B - z_C| = |(1+i)e^{i\theta} - ie^{i\theta}|$
$= |e^{i\theta}| = 1$

$OA = |z_A| = |2e^{i\theta}| = 2$

$OC = |z_C| = |ie^{i\theta}| = |e^{i(\frac{\pi}{2}+\theta)}| = 1$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \frac{(1+2)\times 1}{2} = \frac{3}{2}$ indépendant de θ.

$\mathcal{A}_{(OABC)} = 3/2 \ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exo 3: Partie A.

$g(x) = x^2(x+2) \qquad D_g = [0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2(x+2)) = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2(x+2))$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$g'(x) = 2x(x+2) + x^2$
$= 2x^2+4+x^2$

$\Rightarrow g'(x) = 3x^2+4 > 0 \ \forall x \in [0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2°) On pose $h(x) = g(x) - 4$.

$h([0,+\infty[) =]h(0) = g(0) - 4 = -4, \ h(+\infty) = g(+\infty) - 4 = +\infty$.

$h([0,+\infty[) =]-4,+\infty[$

Comme $h(0)\times h(+\infty) < 0$

D'après T.V.I $\exists\ \alpha$ telque $h(\alpha) = 0 \iff g(\alpha) - 4 = 0$
$\iff g(\alpha) = 4$.

$\alpha \in]-4,+\infty[$

Méthode de Balayage:

$1,2$	$h(1,2) = 0,128$
$1,1$	$h(1,1) = -0,462$
	0

Comme $h(1,2)\times h(1,1) < 0$ et $1,2 - 1,1 = 10^{-1}$.

$\Rightarrow \boxed{1,1 < \alpha < 1,2}$

3°) $g(x) \geq 4 \iff h(x) \geq 0$
et $h(x) \geq 0$ ssi $x \geq 1,2$
$\Rightarrow$ si $x \in [1,2, +\infty[\Rightarrow g(x) \geq 4$.

Partie B:

$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x, \quad D_f = \mathbb{R}^*$

1°) La parité de f

$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2+2}}{-x} - x$
$= -\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x\right)$
$= -f(x) \Rightarrow f$ est impaire

2°) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+2/x^2}}{x}$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+2/x^2} + x = 1+\infty = +\infty$.

f est impaire $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Mami Math le 30 janvier 2015.

Exo1 : $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$E(\theta) : Z^2 - (3+i)Ze^{i\theta} + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$

1) a) $Z^2 - (3+i)Ze^{i\theta} + 2(1+i)e^{2i\theta} = 0$

$\Delta = ((3+i)e^{i\theta})^2 - 4(2e^{2i\theta}(1+i))$

$\Delta = e^{2i\theta}(\cancel{8}+6i-\cancel{8}-8i)$

$\Leftrightarrow \Delta = -2ie^{2i\theta}$.

$\Leftrightarrow \Delta = (1-i)^2 e^{2i\theta}$.

$\Rightarrow Z = \dfrac{e^{i\theta}(3+\cancel{i}+1-\cancel{i})}{2} = 2e^{i\theta}$.

et $Z = \dfrac{e^{i\theta}(3+i-1+i)}{2} = (1+i)e^{i\theta}$.

$|2e^{i\theta}| = 2$. et $|(1+i)e^{i\theta}| = \sqrt{2}$.

$2 > \sqrt{2} \Leftrightarrow Z' = 2e^{i\theta}$ et $Z'' = (1+i)e^{i\theta}$

b) on a : $Z'' = (1+i)e^{i\theta}$

$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow \boxed{Z'' = \sqrt{2}e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}}$

2) $Z_A = 2e^{i\theta}$, $Z_B = (1+i)e^{i\theta}$, et $Z_C = ie^{i\theta}$.

a) $(OA) \perp (OC)$?

$\dfrac{Z_C - Z_O}{Z_A - Z_O} = \dfrac{ie^{i\theta} - 0}{2e^{i\theta} - 0} = \frac{1}{2}i$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_C - Z_O}{Z_A - Z_O}\right) = \arg(\frac{1}{2}i) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow (OA) \perp (OC)$.

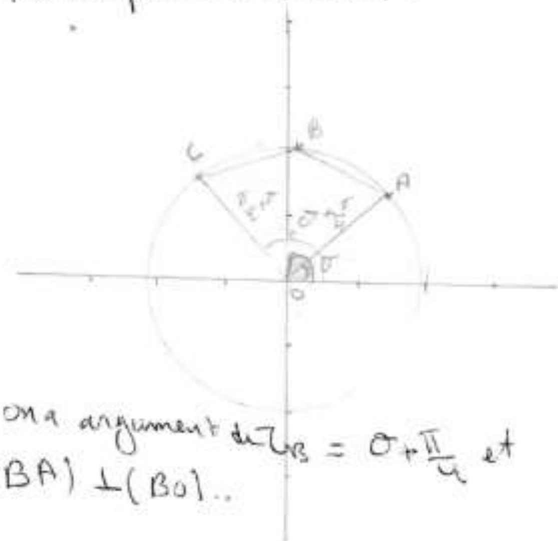
De même pour (BO) et (BA)

$\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_O - Z_B} = \dfrac{2e^{i\theta} - (1+i)e^{i\theta}}{-(1+i)e^{i\theta}} = \dfrac{2-1-i}{-(1+i)}$

$= \dfrac{1-i}{-(1+i)} = \dfrac{i(1+i)}{(1+i)} = i$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_O - Z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

b) comme $(OA) \perp (OC) \Leftrightarrow C \in \dot{a}\ \Delta$ passant par O et $\perp (OA)$.



On a argument de $Z_B = \theta + \frac{\pi}{4}$ et $(BA) \perp (BO)$..

c) OABC est un trapèze rectangle ssi $(OA) \perp (OC)$ et $(CO) \perp (CB)$

On a déjà démontrer que $(OA) \perp (OC)$.

$(CO) \perp (CB)$?

$\dfrac{Z_B - Z_C}{Z_O - Z_C} = \dfrac{(1+i)e^{i\theta} - ie^{i\theta}}{-ie^{i\theta}}$

$= \dfrac{e^{i\theta} + \cancel{ie^{i\theta}} - \cancel{ie^{i\theta}}}{-ie^{i\theta}} = -\frac{1}{i} = i$

$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{Z_B - Z_C}{Z_O - Z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow (CO) \perp (CB) \Leftrightarrow$ OABC est un trapèze rectangle.

Exo3: Partie B (suite).

Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow x = 0$ est A.V au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ de $\mathcal{C}_f$.

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ f peut avoir un A.O au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ f peut aussi avoir un A.O au voisinage de $+\infty$

3°) $D : y = x + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x - x - 1$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$y = x + 1$ est A.O au voisinage de $+\infty$ de $\mathcal{C}_f$.

Comme f est impaire et $y = x + 1$ est A.O au voisinage de $+\infty \Rightarrow y = +x - 1$ est A.O au voisinage de $-\infty$ de $\mathcal{C}_f$.

4°).